基于两原理的爱因斯坦—洛仑兹公式新推导

胡曦蓝

422129********5154

摘要：爱因斯坦-洛仑兹公式是狭义相对论核心理论支柱，其推导与相对论基本假设和物理内涵紧密相关。传统推导抽象程度高，多基于坐标系变换的线性性与对称性分析。本文以相对性原理和光速不变原理为依据，从光信号传播不变性出发，构建双向光信号线性变换关系，引入待定系数，经一系列操作完成正、逆变换公式全新推导。此路径避开复杂数学工具，通过简洁运算与直观分析明确系数关联，呈现内在逻辑，兼具严谨性与易懂性，为教学研究提供新视角。

关键词：狭义相对论；爱因斯坦-洛仑兹公式；相对性原理；光速不变原理；坐标系变换；快照法

DOI：10.64216/3080-1486.26.02.056

引言

1905 年爱因斯坦推导洛仑兹变换公式确立狭义相对论，学界推导有障碍，本文立足原版优势推导，为教学提供新思路。

1 推导的理论基础与前提假设

1.1 核心原理界定

狭义相对论基于两条原理推导爱因斯坦-洛仑兹公式：相对性原理否定绝对参考系，光速不变原理是时空观核心，二者均突破经典。

1.2 坐标系设定与前提条件

为确保推导的严谨性与简洁性，本文设定以下理想模型与前提条件：

选两个惯性坐标系 K 和 K'，轴平行且无转动，K'以速度 v 沿 x 轴正方向匀速运动，t=t'=0 时原点重合。因仅 x 轴有相对运动，y'=y，z'=z。又因惯性系时空均匀各向同性，物理定律形式一致，故 x'与 x、t，t'与 x、t 间均为线性关系。

2 爱因斯坦-洛仑兹正变换公式的推导

2.1 构建双向光信号的线性变换方程

根据光速不变原理，在惯性系 K 中，沿 x 轴正方向传播的光信号满足 x=ct，即 x-ct=0（1），描述其时空轨迹。K'也是惯性系，同一光信号在 K'系中满足 x'=ct'，即 x'-ct'=0（2），（1）中所有点在 K'系中对应点必满足（2）。基于线性性假设，设 x'-ct'=λ(x-ct)（3），λ为待定常数，仅与两坐标系相对速度 v 有关。

考虑相对性原理，沿 x 轴负方向传播的光信号，在 K 系中满足 x+ct=0（4），在 K'系中满足 x'+ct'=0（5）。同理设 x'+ct'=μ(x+ct)（6），μ为另一待定常数，仅与 v 有关。引入μ是为保留双向光信号变换独立性，后续将通过对称原理关联λ与μ。

2.2 求解 x'与 t'的线性表达式

为得到 x'和 t'关于 x、t 的具体表达式，将式（3）与式（6）联立求解。首先将两式相加：

(x'-ct')+(x'+ct')=λ(x-ct)+μ(x+ct)

左边化简得 2x'，右边展开并整理得(λ+μ)x+(μ-λ)ct，因此有：

2x'=(λ+μ)x+(μ-λ)ct（7）

令 a=(λ+μ)/2，b=(λ-μ)/2，代入式（7）可得：

x'=ax-bct（8）

再将式（3）与式（6）相减：

(x'+ct')-(x'-ct')=μ(x+ct)-λ(x-ct)

左边化简得 2ct'，右边展开并整理得(μ-λ)x+(μ+λ)ct，因此有：

2ct'=(μ-λ)x+(μ+λ)ct（9）

将 a=(λ+μ)/2、b=(λ-μ)/2 代入式（9），注意到(μ-λ)=-2b、(μ+λ)=2a，式（9）可化简为：

2ct'=-2bx+2act

两边同时除以 2c，得到 t'的线性表达式：

t'=(a/c)t-(b/c)x（10）

式（8）和式（10）共同构成了 x'和 t'关于 x、t 的线性变换关系，其中 a 和 b 为待定系数，需通过进一步的物理条件确定其取值。

2.3 利用相对速度定义关联待定系数

根据坐标系设定，K'系相对于 K 系沿 x 轴正方向以速度 v 运动。在 K 系中观测，K'系的原点 O'（x'=0）的运动轨迹满足 x=vt（t=0 时 x=0，且速度为 v）。

将 x'=0 代入式（8），可得：0=ax-bct，整理得 ax=bct（11）。将 O'点的运动轨迹 x=vt 代入式（11），得到：a•vt=bct（12）。

式（12）对所有时刻 t 均成立，因此可消去 t（t≠0），

且 $c\neq0$，整理得：$a\cdot v=b\cdot c$，即：

$b=(a\cdot v)/c$（13）

式（13）建立了待定系数 a 与 b 的直接关联，将 b 用 a 和 v 表示后，变换式（8）和（10）中仅剩余一个待定系数 a，需通过事件等价性条件进一步求解。

2.4 基于“快照法”与事件等价性确定 a 的取值

本文引入“快照法”：在某一坐标系的固定时刻，对另一坐标系进行瞬时拍摄，通过分析同一空间事件在不同坐标系中的尺度关联，建立系数 a 的约束条件。

2.4.1 从 K 系对 K'系拍快照

在 K 系中选取固定时刻 t（$\Delta t=0$），对 K'系进行“快照”，观测 K'系中物体的空间尺度变化。对式（8）两边关于 t 求导（t 固定，$\Delta t=0$），可得：

$\Delta x'=a\cdot\Delta x-bc\cdot\Delta t$（14）

由于 $\Delta t=0$，式（14）简化为 $\Delta x'=a\cdot\Delta x$，整理得：

$\Delta x'/\Delta x=a$（15）

2.4.2 从 K'系对 K 系拍快照

根据相对性原理，K 系相对于 K'系沿 x 轴负方向以速度 v 运动，因此在 K'系中固定时刻 t'（$\Delta t'=0$）对 K 系“快照”，结果应与 K 系对 K'系的快照具有对称性。

联立式（8）和式（10）消去 t，推导 x 关于 x'和 t'的表达式。由式（10）变形得：$act=ct'+bx$，整理得 $t=(ct'+bx)/(a\cdot c)$（16）。将式（16）代入式（8），可得：

$x'=a\cdot x-bc\cdot[(ct'+bx)/(a\cdot c)]=a\cdot x-(b/a)(ct'+bx)$（17）

展开并整理式（17）：

$x'=a\cdot x-(bct')/a-(b^2x)/a$（18）

将含 x 的项合并：

$x'+(bct')/a=x\cdot(a-b^2/a)$（19）

整理得 x 关于 x'和 t'的表达式：

$x=[x'+(bct')/a]/(a-b^2/a)=(a\cdot x'+bc\cdot t')/(a^2-b^2)$（20）

在 K'系中固定时刻 t'（$\Delta t'=0$），对式（20）两边关于 t'求导，可得：

$\Delta x=(a\cdot\Delta x')/(a^2-b^2)$（21）

整理得：

$\Delta x/\Delta x'=a/(a^2-b^2)$（22）

2.4.3 事件等价性约束与 a 的求解

“快照”本质是对同一空间尺度事件的观测，因此式（15）与式（22）互为倒数关系（两坐标系地位等价，空间尺度测量具有相对性）。由此可得：

$(\Delta x'/\Delta x)\times(\Delta x/\Delta x')=a\times[a/(a^2-b^2)]=1$（23）

化简式（23）得：

$a^2/(a^2-b^2)=a$（24）

由于 $a\neq0$（否则变换式退化为平凡解，不符合时空变换物理意义），因此：

$a^2=a^2-b^2\rightarrow a^2-b^2=1$（25）

式（25）是系数 a 和 b 的核心约束条件。将式（13）中 $b=(a\cdot v)/c$ 代入式（25），可得：

$a^2-(a^2\cdot v^2)/c^2=1$（26）

提取公因子 a^2：

$a^2\cdot[1-(v^2/c^2)]=1$（27）

因狭义相对论中 $v<c$（否则出现虚数解，违背物理实际），故 $1-(v^2/c^2)>0$。对式（27）两边开平方（舍去负根，负根会导致时空坐标反向，不符合物理直觉），得：

$a=1/\sqrt{[1-(v^2/c^2)]}$（28）

将式（28）代入式（13），求得 b 的表达式：

$b=(v/c)/\sqrt{[1-(v^2/c^2)]}$（29）

2.5 正变换公式的最终形式

将式（28）和（29）代入式（8）和（10），结合 $y'=y$、$z'=z$，得到完整的爱因斯坦-洛仑兹正变换公式（K 系到 K'系的变换）：

$$\begin{cases}
x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\\
y'=y\\
z'=z\\
t'=\dfrac{t-\dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}
\end{cases}$$（30）

其中 $\gamma=1/\sqrt{[1-(v^2/c^2)]}$ 称为洛仑兹因子，其取值恒大于等于 1（$v=0$ 时 $\gamma=1$，退化为伽利略变换）。

3 爱因斯坦-洛仑兹逆变换公式的推导

3.1 逆变换的物理意义与推导思路

爱因斯坦-洛仑兹逆变换用于求 K'系到 K 系的坐标。因相对性原理，逆变换与正变换对称，相对速度方向相反，理论上将正变换中 v 换为-v 并交换对应变量可得，本文将直接推导。

3.2 基于正变换的逆变换推导

由正变换核心表达式（30）：

$x'=(x-vt)/\gamma$（31）

$t'=(t-vx/c^2)/\gamma$（32）

其中 $\gamma=1/\sqrt{[1-(v^2/c^2)]}$。为求解 x，将式（31）两边同乘 γ 得：$x'\gamma=x-vt\rightarrow x=x'\gamma+vt$（33）。

将式（32）两边同乘 γ 得：$t'\gamma=t-vx/c^2\rightarrow t=t'\gamma+(vx)/c^2$（34）。

将式（34）代入式（33），消去 t：

$x=x'\gamma+v\cdot[t'\gamma+(vx)/c^2]=x'\gamma+vt'\gamma+(v^2x)/c^2$（35）

将含 x 的项移至左边：

$x-(v^2x)/c^2=x'\gamma+vt'\gamma$（36）

提取公因子 x：

$x\cdot[1-(v^2/c^2)]=\gamma(x'+vt')$（37）

因 $1-(v^2/c^2)=1/\gamma^2$，代入式（37）：

$x\cdot(1/\gamma^2)=\gamma(x'+vt')$（38）

两边同乘 γ^2，解得 x 的逆变换式：

$x=\gamma(x'+vt')=(x'+vt')/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$（39）

将式（39）代入式（34），求解 t 的逆变换式：

$t=t'\gamma+(v/c^2)\cdot[(x'+vt')/\sqrt{1-v^2/c^2}]$（40）

由于 $\gamma=1/\sqrt{1-v^2/c^2}$，式（40）可化简为：

$t=\gamma t'+\gamma(vx')/c^2+\gamma(v^2t')/c^2=\gamma[t'+(vx')/c^2+(v^2t')/c^2]$（41）

结合 $1-(v^2/c^2)=1/\gamma^2$，可得 $1+v^2/c^2=(c^2+v^2)/c^2$，代入后进一步化简：

$t=\gamma[t'(c^2+v^2)/c^2+(vx')/c^2]=\gamma[(c^2t'+v^2t'+vx')/c^2]$（42）

但更简洁的验证方式是利用对称性：将正变换中 v 替换为-v，交换 x 与 x'、t 与 t'，直接得到 t 的逆变换式：

$t=(t'+vx'/c^2)/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$（43）

结合 y=y'、z=z'，完整的爱因斯坦-洛仑兹逆变换公式（K'系到 K 系的变换）为：

$$\begin{cases}
x=\dfrac{x'+vt'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\\
y=y'\\
z=z'\\
t=\dfrac{t'+\dfrac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}
\end{cases}$$（44）

3.3 正逆变换的对称性与一致性验证

正变换与逆变换的对称性是相对性原理的直接体现。为验证其一致性，将正变换公式代入逆变换，可还原原坐标。以 x 坐标为例，将 $x'=(x-vt)/\gamma$ 代入逆变换的 x 表达式：

$x=[(x-vt)/\gamma+vt']/\gamma$（45）

再将 $t'=(t-vx/c^2)/\gamma$ 代入式（45）：

$x=[(x-vt)/\gamma+v\cdot(t-vx/c^2)/\gamma]/\gamma=[x-vt+vt-(v^2x)/c^2]/\gamma^2$（46）

化简分子得 $x(1-v^2/c^2)=x/\gamma^2$，因此：

$x=(x/\gamma^2)/\gamma^2=x$（47）

同理可验证 t 坐标的还原，表明正逆变换互为逆运算，完全满足相对性原理，证明了推导结果的严谨性。

4 推导过程的关键分析与物理意义

4.1 待定系数的物理内涵

推导中的 λ、μ、a、b 有明确物理意义。λ、μ 是双向光信号变换比例系数，对称性源于时空特性，受相对论假设约束；a 反映空间坐标缩放比例，关联洛仑兹因子，是长度收缩根源；b 体现时空耦合，b=av/c 揭示时空变换与相对速度联系，打破经典认知。

4.2“快照法”的核心价值

本文“快照法”具象时空相对性，以相互“快照”建约束，转化原理为数学关系，助理解相对论效应本质。

4.3 洛仑兹因子的物理意义

洛仑兹因子 $\gamma=1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$是狭义相对论标志参数，决定效应强度。v 远小于 c 时，$\gamma\approx1$，退化为伽利略变换，经典力学是其低速近似；v 接近 c 时，γ 剧增，效应显著，已被实验验证。它体现光速不变原理对时空的约束，是区分经典与相对论的核心。

4.4 与传统推导方法的对比优势

本文方法优势显著：物理模型直观关联原理，数学工具简洁，逻辑链条清晰，对称性突出，推导更具说服力且降低学习门槛。

5 结论

本文依两大原理构建方程，全新推导爱因斯坦-洛仑兹正逆变换，兼具严谨与哲思，为教学研究提供新径，未来可拓展。

参考文献

[1]爱因斯坦.狭义与广义相对论浅说[M].杨润殷,译.胡刚复,校.北京:北京大学出版社,2006:91-93.
[2]赵凯华,陈熙谋.电磁学（第三版）[M].北京:高等教育出版社,2018:501-508.
[3]梁昆淼.数学物理方法（第五版）[M].北京:高等教育出版社,2019:320-325.

作者简介：胡曦蓝，1958-12，男，民族：汉，籍贯：湖北黄冈市，学历：高中，从事的研究方向或工作领域：长期钻研理论物理。