多元函数极值充分定理的推广及其教学实践

袁玉强（通讯作者） 罗翔

温州理工学院 数据科学与人工智能学院，浙江温州，325000；

摘要：现行高等数学教材中多元函数无条件极值的讨论局限于二元情形，与实际多元优化需求脱节。本文将二元函数极值充分定理推广到n元情形，引入多元函数泰勒展式中二阶偏导数构成的海森矩阵的正定性判别方法，并通过典型实例验证其应用。本研究是“基于大语言模型的个性化高等数学试题库构建探索”教改项目的重要组成部分，旨在为试题库提供更丰富的多元函数极值问题类型，利用大语言模型技术生成个性化习题和解答。

关键词：多元函数极值；泰勒展式；海森矩阵

DOI：10.64216/3080-1494.26.01.066

引言

多元函数极值理论在工程技术、经济管理等领域应用广泛。然而，现行教材仅详细讨论二元函数极值判别方法，对三元及以上情形较少涉及[1,2]，与实际问题中普遍存在的多元优化需求脱节。本文旨在将二元函数极值充分定理推广到 n 元情形。作为“基于大语言模型的个性化高等数学试题库构建探索”项目的一部分，本研究特别关注如何将推广后的理论应用于个性化教学资源的开发，利用大语言模型技术自动生成多元函数极值问题的变式练习和详细解答。

1 多元函数极值定理的推广与应用

1.1 现有教材内容

教材中二元函数无条件极值判断充分条件内容为

定理 1. 设 $z = f(x, y)$在(x_0, y_0)处二阶连续可偏导，且$f_x = f_y = 0$，记 $A = f_{xx}, B = f_{xy}, C = f_{yy}$，则：$AC - B^2 > 0$ 且 $A > 0$ 时为极小值；(2) 当 $AC - B^2 > 0$ 且 $A < 0$ 时为极大值；(3) 当 $AC - B^2 < 0$ 时不是极值；(4) 当 $AC - B^2 = 0$ 时方法失效。

在对于具备理工科背景的同学而言，可能涉及到三元及以上多元函数机的极值问题，仅在此定理的基础上无法解决多元的无条件极值问题。同时作为基础通识课程个性化试题库构建中，仅该定理的结论也限制了可生成的习题类型和难度层次。

1.2 理论推广

基于以上分析，本文做相应推广。在此之前，先来认识海森矩阵。设 n 元函数$f(x) = f(x_1, ..., x_n)$在$\boldsymbol{x}_0$处二阶连续可偏导，泰勒展开为：

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$$

其中海森矩阵$H(x_0) = [\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j]_{n\times n}$。

定理 2.（n 元函数无条件极值充分条件）. 设 n 元函数 $f(x)$在x_0处二阶连续可偏导且$\nabla f(x_0) = 0$，则：(1) 若 $H(x_0)$正定，$f(x_0)$为极小值；(2) 若 $H(x_0)$负定，$f(x_0)$为极大值；(3) 若 $H(x_0)$不定，$f(x_0)$不是极值；(4) 若 $H(x_0)$半定，方法失效。

以上定理也有文章在引入多元函数导数的张量后，通过张量形式的多元函数带皮亚诺余项的泰勒公式，给出了基于张量的多元函数极值点判定定理[3]。至于海森矩阵正定性的判断，可通过顺序主子式$\Delta_k > 0(k = 1, ..., n)$或所有特征值为正判定。这一推广为个性化试题库提供了丰富的题目生成基础，可以根据学生能力水平调整函数维度和复杂度。

1.3 应用实例

例 1：考虑三元函数$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2$的极值点情况。

驻点求解：梯度为

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3yz - 4x \\ 3y^2 - 3xz - 4y \\ 3z^2 - 3xy - 4z \end{bmatrix}$$

令$\nabla f = 0$，可解得驻点为$(0,0,0), (1,1,1), (-1, -1, -1)$。

极值判定：海森矩阵为

$$H=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6x-4 & -3z & -3y \\ -3z & 6y-4 & -3x \\ -3y & -3x & 6z-4 \end{bmatrix}$$

分别判断：在(1,1,1)处，$H=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$，顺序主子式$-5<0$，$\Delta_3=-28<0$，矩阵不定，故 (1,1,1)不是极值点。

在(0,0,0)处，$H=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$，顺序主子式均负，矩阵负定，故(0,0,0)为极大值点，$f(0,0,0)=0$。

在$(-1,-1,-1)$处，$H=\begin{bmatrix} -10 & 3 & 3 \\ 3 & -10 & 3 \\ 3 & 3 & -10 \end{bmatrix}$，$\Delta_1=-10<0$，$\Delta_2=91>0$，$\Delta_3=-784<0$，矩阵不定，故不是极值点。

2 结论

本文将多元函数极值充分定理从二元推广到 n 元，引入海森矩阵判定方法，学生能够更好地理解极值判定的本质，完善了理论体系，并为后续课程学习奠定基础。这一推广有效衔接了基础理论与实际应用，建议在高等数学教学中适当引入多元函数极值的一般理论，强化学生的多维优化问题解决能力。作为个性化高等数学试题库构建探索项目的重要成果，本文的理论推广和实例分析为试题库提供了丰富的多元函数极值问题类型，使得系统能够根据学生个体差异生成不同维度和复杂度的个性化习题，有效提升教学效率和学习效果。

参考文献

[1]同济大学数学系.高等数学(第七版)[M].北京:高等教育出版社,2014.

[2]华东师范大学数学系.数学分析(第四版)[M].北京:高等教育出版社,2010.

[3]李颖,倪谷炎,基于导数张量的多元函数极值点判定[J].大学数学,2024,40(1):84-87.

通讯作者简介：袁玉强(1991.03-)，女，汉族，江西宜春人，博士，副教授，研究方向：可积系统。

课题项目：校教学改革项目：基于“大语言模型”的个性化高等数学试题库构建探索(项目编号：2024YB10)。