# 线性正则 Gabor 变换的相位恢复

詹景淇 曾伦君

天津理工大学理学院，天津市，300384；

**摘要：**本文聚焦于线性正则变换相位恢复问题的研究。当前 Gabor 变换相位恢复问题的研究较为成熟，但线性正则变换相位恢复的基本理论体系仍不完善。鉴于此，本文在 Gabor 变换相位恢复理论的基础上，深入探讨线性正则变换的相位恢复问题,通过分析 Gabor 变换与模糊函数之间的关系，提出对于紧支集函数 f，可通过其线性正则 Gabor 变换在离散点集上的强度测量实现相位恢复。这一研究丰富了线性正则变换的理论体系，也为信号处理领域的实际应用提供了新的视角和方法。

**关键词：**傅里叶变换；线性正则变换；Gabor 变换；相位恢复

**DOI：**10.64216/3080-1494.25.12.104

## 1 介绍

随着数字计算机的飞速发展,信号处理的理论与方法得到巨大发展。数字信号处理一般包括变换域分析[1]、采样与重构，奎奈斯特定理[2]、自适应信号处理、信号压缩、傅里叶变换及其快速算法等。

傅里叶变换[3]是处理信号的一种主要数学工具，其不仅在通信中有着广泛的应用，还在数字信号处理、频谱分析等领域发挥着重要作用[4][5]。但傅里叶变换只能告诉有哪些频率成分，但不能知道这些成分出现的时间位置。物理学家丹尼斯•加博尔（Dennis Gabor）于 1946 年提出 Gabor 变换（又称作短时傅里叶变换）。Gabor 变换通过对信号加窗，把信号划分成许多小的时间间隔，进而得到不同时间段的频谱。Gabor 变换主要应用于时频能量分布、非平稳信号建模、图像纹理分析等。

傅里叶变换又存在时频分析僵化和物理建模能力不足的缺陷,因此我们引入了线性正则变换（LCT）。线性正则变换是一种具有三个自由参数的线性变换,是经典傅里叶变(FT)、分数阶傅里叶变换(FRFT)、菲涅耳变换等的推广。不同于傅里叶变换，LCT 则可以通过三个自由参数控制变换，描述缩放、剪切和旋转等更复杂的操作，也由于其灵活性,使其成为数字信号处理的有效工具。如今 LCT 应用于雷达系统分析、滤波器设计、相位恢复等众多领域。

相位恢复是信号处理、光学成像和物理学等领域中的一个经典逆问题，其核心目标是从信号的幅度测量值中恢复丢失的相位信息。相位恢复技术的研究起源于 X 射线晶体学的研究[6]。相位恢复的数学理论发展是一个结合信号处理、优化理论、线性代数与信息科学的交叉领域，其核心在于解决从幅度测量中恢复相位信息的非线性逆问题。目前相位恢复问题的研究包括傅里叶变换相位恢复问题的研究[7][8]，Gabor 变换相位恢复问题的研究[9][10]，以及线性正则变换相位恢复问题的研究等方面[11]。

本文在已有的 Gabor 变换相位恢复问题基础上，研究线性正则变换的相位恢复问题。我们在第二部分给出基本定义和引理，在第三部分，我们首先给出 Gabor 变换和模糊函数的关系，然后给出本文主要结论，即对于紧支集函数 f，可由其线性正则 Gabor 变换在离散点集上的强度测量值进行相位恢复。

## 2 基本定义和引理

在这节中给出了文章中使用的基本符号，基本引理和命题。

定义 1：若 $0 < p < +\infty$ 且 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是一个复函数，定义 $f \in L^p(R)$ 为

$$L^p(R^d) = \left\{ f \middle| \int_R |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\}.$$

定义 2； 对 $\forall f \in L^1(R)$， $\omega \in R$。f 的 Fourier 变换 F 定义为

$$(Ff)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_R f(x) e^{-2\pi i x\omega} \, dx,$$

易知其 Fourier 逆变换为

$$f(x) = (F^{-1}Ff)(x) = (F^{-1}\hat{f})(x) = \int_R \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x} \, d\omega.$$

定义 3：线性正则变换 L：$L^2(R) \longrightarrow L^2(R)$ 的定义为

$$(Lf)(\omega) = \widehat{f_M}(\omega) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) k_M(\omega, t) dt, & b \neq 0. \\ \sqrt{d} e^{i\frac{cd\omega^2}{2}} f(du), & b = 0. \end{cases}$$

M 表示 4 个参数$(a, b, c, d)$，且核函数为

$$k_M(\omega, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi|b|}} e^{\frac{i}{2b}(d\omega^2 - 2t\omega + at^2)},$$

且满足 $ad - bc = 1$。

线性正则变换（LCT）主要取决于 3 个独立的参数，其变换的坐标为

$$\begin{pmatrix} x' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix},$$

将位置 x 和波数 k 映射到$x'$和$k'$上，参数 $a, b, c, d$ 是实数且满足 $ad - bc = 1$。

下面我们通过表格给出其它变换与线性正则变换的关系。

| 变换参数（A） | 相关变换 |
|---|---|
| $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ | 线性正则变换（LCT） |
| $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = A_\theta$ | 分数阶傅里叶变换(FRFT) |
| $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A_{FT}$ | 经典傅里叶变换（FT） |
| $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | 菲涅尔变换 |

定义 4：Gabor 变换$\mathcal{G}: L^2(R) \to L^2(R^2)$的定义为

$$(\mathcal{G}f)(x, \omega) = \int_R f(t)\varphi(t - x)e^{-2\pi i t\omega}\, dt,$$

其中取窗口函数为高斯窗函数$\varphi(t) = e^{-\pi t^2}$。

定义 5：函数 $f: R \to \mathbb{C}$的线性正则 Gabor 变换定义为

$$(W_\varphi f)(x, \omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi|b|}} \int_R f(t)\varphi(t - x)e^{i\pi(\frac{a}{b}t^2 - 2\frac{\omega}{b}t + \frac{d}{b}\omega^2)}\, dt,$$

这里的$\varphi$为高斯函数。

定义 6：设$\mathcal{C} \subseteq L^2(R)$和$\mathcal{X} \subseteq R^2$，我们称集合对$(\mathcal{C}, \mathcal{X})$满足条件(U)，如果每一个 $f \in \mathcal{C}$都可以通过集合$\{|W_\phi f(z)| : z \in \mathcal{X}\}$的值唯一确定，在至多相差一个全局相位意义下。用公式表达为：

$$\forall f, h \in \mathcal{C}:\ (|W_\varphi f(z)| = |W_\varphi h(z)|,\ \forall z \in \mathcal{X} \Longrightarrow \tau \in \mathbb{T}:\ f = \tau h). \qquad (U)$$

则称在线性正则 Gabor 变换下函数 f 可以相位恢复。这里$\mathbb{T} = \{\tau \in \mathbb{T}: |\tau| = 1\}$.

定义 7：设 $f \in L^2(R)$，$\varphi(t)$是高斯窗函数,定义 f 和$\varphi$交叉模糊函数 $A(f, \varphi)$为：

$$A(f, \varphi)(x, \omega) = \int_R f\left(t + \frac{x}{2}\right)\overline{\varphi\left(t - \frac{x}{2}\right)} e^{-2\pi i t\omega}\, dt.$$

定义 8：设 $f: R \longrightarrow \mathbb{C}$，$\lambda \in R$, 定义平移算子$T_\lambda$为$(T_\lambda f)(t) = f(t - \lambda)$.

定义 9：设$\lambda \in R$, 对于一个函数 $h: R \to \mathbb{C}$，我们引入符号$h_\lambda$为：

$$h_\lambda(t) = (T_\lambda h)(t)\overline{h(t)}.$$

定义 10：对 $\Omega > 0$, Paley-Winner 空间定义如下：

$$PW_\Omega^2 = \{f \in L^2(R): \mathrm{supp}(\hat{f}) \subseteq [-\Omega, \Omega]\},$$

命题 1：（Shannon 采样定理）：设 $\Omega > 0, f(x) \in PW_\Omega^2$，则对任意的 $x \in R$, 有：

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2\Omega}\right) \mathrm{sinc}(2\Omega x - n),$$

其中 $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$。

命题 2：(Zalik 定理)：设$-\infty < a < b < +\infty, r > 0$，设$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是一列不相同的复数序列，且存在正实数$\delta > 0$ 和自然数$N_0 \in \mathbb{N}$使得

$$\left|R\left[c_n - \frac{1}{2}\right]\right| \geq \delta\left|c_n - \frac{1}{2}\right|, n \geq N_0,$$

则$\{t \longmapsto e^{-r^2(t - c_n)^2} | n \in \mathbb{N}\}$在$L^2([a, b])$中完备当且仅当$\sum_{n\in\mathbb{N}, c_n \neq 0} |c_n|^{-1}$发散，其中 $R(z)$表示 z 的实部。

## 3 主要结果

在这部分，我们给出本文的主要结果，即给出在晶格测量中的线性正则Gabor变换下函数可相位恢复的条件。

根据定义 4 和定义 7 我们得到下面引理。

引理 1： 对 $f \in L^2(R)$，有

$$(\mathcal{G}f)(x, \omega) = e^{-\pi i x\omega} A(f, \varphi)(x, \omega).$$

证明：

$$(\mathcal{G}f)(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t - x)e^{-2\pi i t\omega}\, dt,$$

令 $t = u + \frac{x}{2}$, 得：

$$\begin{aligned}(\mathcal{G}f)(x, \omega) &= \int_R f\left(u + \frac{x}{2}\right)\varphi\left(u - \frac{x}{2}\right)e^{-2\pi i\omega\left(u + \frac{x}{2}\right)} du \\ &= e^{-\pi i x\omega}\int_R f\left(u + \frac{x}{2}\right)\varphi\left(u - \frac{x}{2}\right)e^{-2\pi i\omega u} du \\ &= e^{-\pi i x\omega} A(f, \varphi)(x, \omega)\end{aligned}$$

定理 3：设 $b, c > 0$ 和$\mathcal{C} = L^4[-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$，选择$\mathcal{X} = \frac{1}{b}\mathbb{Z} \times \frac{1}{2bc}\mathbb{Z}$，则此集合对$(\mathcal{C}, \mathcal{X})$满足条件(U)。换句话说，对任意信号 $f, h \in L^4[-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$，以下条件等价

(i) $\exists \tau \in \mathbb{T}, |\tau| = 1$ 使得 $f = \tau h$,

(ii) $|(W_\varphi f)(x, \omega)| = |(W_\varphi h)(x, \omega)|, (x, \omega) \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \times \frac{1}{2c}\mathbb{Z}.$

证明：

我们首先证明(i) $\Longrightarrow$(ii). 把 $f = \tau h$ 代入，得对$(x, \omega) \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \times \frac{1}{2c}\mathbb{Z}$，有

$$|(W_\varphi f)(x, \omega)| = |(W_\varphi \tau h)(x, \omega)| = |(W_\varphi h)(x, \omega)|.$$

现在证明(ii) $\Longrightarrow$(i). 令 $F(t) = e^{i\pi\frac{a}{b}t^2} f(t)$. 首先我们证明对$\forall f \in L^2(R)$，$(x, \omega) \in R^2$有

$$\mathcal{F}_2\left(|(W_\varphi f)|^2\right)(x, \omega) = \frac{1}{2\pi|b|}\langle F_{\frac{\omega}{b}},\ T_x\varphi_{\frac{\omega}{b}}\rangle, \qquad (1)$$

其中$F_2$表示对第二个参数做傅里叶变换，对其分三

步证明。

第一步先证明

$$F_2\left(\left|(W_\varphi f)\right|^2(x,\omega)\right)=\frac{1}{2\pi|b|}\mathcal{F}_2\left(|A(F,\varphi)|^2\left(x,\frac{\omega}{b}\right)\right).\tag{2}$$

证明如下：

由定义 4 和定义 5 得

$$\left(W_\varphi f\right)(x,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi|b|}}e^{i\pi\frac{d}{b}\omega^2}\int_R f(t)e^{i\pi\frac{a}{b}t^2}\varphi(t-x)\,e^{-2i\pi\frac{\omega}{b}t}dt$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi|b|}}e^{i\pi\frac{d}{b}\omega^2}(\mathcal{G}F)\left(x,\frac{\omega}{b}\right)$$

又由引理 1 得 $(\mathcal{G}F)\left(x,\frac{\omega}{b}\right)=e^{-i\pi x\frac{\omega}{b}}A(F,\phi)(x,\frac{\omega}{b})$

进而

$$\left(W_\phi f\right)(x,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi|b|}}e^{i\pi\frac{d}{b}\omega^2}e^{-i\pi x\frac{\omega}{b}}A(F,\phi)\left(x,\frac{\omega}{b}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi|b|}}e^{\frac{i\pi}{b}(d\omega^2-x\omega)}A(F,\varphi)\left(x,\frac{\omega}{b}\right),$$

得到 $\left|\left(W_\phi f\right)(x,\omega)\right|^2=\frac{1}{2\pi|b|}\left|A(F,\phi)\left(x,\frac{\omega}{b}\right)\right|^2$，

所以 $F_2\left(\left|\left(W_\phi f\right)\right|^2(x,\omega)\right)=\frac{1}{2\pi|b|}F_2\left(\left|A(F,\phi)\right|^2\left(x,\frac{\omega}{b}\right)\right)$.

第二步对于 $f\in L^2(R)$，引入符号

$$P_x(t)=F\left(t+\frac{x}{2}\right)\overline{\varphi\left(t-\frac{x}{2}\right)}.$$

我们证明

$$F_2(|A(F,\varphi)|^2)(x,\omega)=[(F^2P_x)*\overline{P_x}](\omega)\tag{3}$$

证明如下：

由定义 7 知 F 和 $\phi$ 交叉模糊函数 $A(F,\phi)$ 为

$$A(F,\varphi)(x,\omega)=\int_R F\left(t+\frac{x}{2}\right)\overline{\varphi\left(t-\frac{x}{2}\right)}e^{-2\pi it\omega}\,dt.$$

由定义 2 知

$$(\mathcal{F}P_x)(\omega)=\int_{\mathbb{R}}P_x(t)e^{-2\pi it\omega}\,dt=\int_{\mathbb{R}}F\left(t+\frac{x}{2}\right)\overline{\varphi\left(t-\frac{x}{2}\right)}e^{-2\pi it\omega}\,dt,$$

所以 $A(F,\phi)(x,\omega)=(FP_x)(\omega)$,得

$$|A(F,\varphi)(x,\omega)|^2=A(F,\varphi)(x,\omega)\overline{A(F,\varphi)(x,\omega)}=(\mathcal{F}P_x)(\omega)\overline{(\mathcal{F}P_x)(\omega)}.\tag{4}$$

因　为 $(F^{-1}\overline{P_x})(\omega)=\int_{\mathbb{R}}\overline{P_x(t)}e^{2\pi it\omega}\,dt=\overline{\int_{\mathbb{R}}P_x(t)e^{-2\pi it\omega}\,dt}=\overline{(FP_x)(\omega)}$，所以

$$\{F^{-1}[(F^2P_x)*\overline{P_x}]\}(x)=(FP_x)(\omega)\cdot(F^{-1}\overline{P_x})(\omega)=(FP_x)(\omega)\overline{(FP_x)(\omega)},\tag{5}$$

综上由(4)得

$$|A(F,\varphi)(x,\omega)|^2=(FP_x)(\omega)\overline{(FP_x)(\omega)}$$
$$=\{F^{-1}[(F^2P_x)*\overline{P_x}]\}(\omega),$$

所以 $\mathscr{F}_2(|A(F,\varphi)|^2)(x,\omega)=[(F^2P_x)*\overline{P_x}](\omega)$.

第三步我们证明：

$$\left[(F^2P_x)*\overline{P_x}\right](\omega)=\langle F_\omega,(T_x\varphi_\omega)\rangle.\tag{6}$$

因为 $\langle F_\omega,\left(T_x\varphi_\omega\right)\rangle=\int_{\mathbb{R}}F_\omega(t)\overline{(T_x\varphi_\omega)(t)}\,dt$,

且由定义 8 和定义 9 知

$$\langle F_\omega,(T_x\varphi_\omega)\rangle=\int_R F(t-\omega)\overline{F(t)\varphi(t-x-\omega)}\varphi(t-x)\,dt.$$

由 $P_x(t)$ 定义得 $\overline{P_x(\omega-t)}=\overline{F\left(\omega+\frac{x}{2}-t\right)}\phi\left(\omega-t-\frac{x}{2}\right)$.

又因为 $(Ff)(x)=(F^{-1}f)(-x)$,所以

$$(F^2P_x)(t)=[F^{-1}(\mathcal{F}P_x)](-t)=P_x(-t)$$
$$=F\left(\frac{x}{2}-t\right)\overline{\varphi\left(-t-\frac{x}{2}\right)}.$$

进而

$$[(F^2P_x)(t)*\overline{P_x}(t)](\omega)=\int_{\mathbb{R}^d}(F^2P_x)(t)\overline{P_x(\omega-t)}\,dt$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F\left(\frac{x}{2}-t\right)\overline{\varphi\left(-t-\frac{x}{2}\right)F\left(\omega+\frac{x}{2}-t\right)}\varphi(\omega-t$$
$$-\frac{x}{2})\,dt=\int_{\mathbb{R}}F(\tilde{t}-\omega)\overline{\varphi(-\omega+\tilde{t}-x)F(\tilde{t})}\varphi(\tilde{t}$$
$$-x)d\tilde{t},$$

其中令 $\tilde{t}=\omega+\frac{x}{2}-t$，故得 $[(F^2P_x)*\overline{P_x}](\omega)=\langle F_\omega，(T_x\varphi_\omega)\rangle$. 第三步证明完成。

综上由（2）式、（3）式和（6）式得到（1）式

$$\mathcal{F}_2\left(\left|(W_\varphi f)\right|^2(x,\omega)\right)=\frac{1}{2\pi|b|}F_2\left(|A(F,\varphi)|^2\left(x,\frac{\omega}{b}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi|b|}[(F^2P_x)*\overline{P_x}]\left(\frac{\omega}{b}\right)=\frac{1}{2\pi|b|}\langle F_{\frac{\omega}{b}}，(T_x\varphi_{\frac{\omega}{b}})\rangle.$$

下面证明当 $\left|\frac{\omega}{b}\right|>c,F_{\frac{\omega}{b}}=0$ a.e.

因为 $F_{\frac{\omega}{b}}(t)=\left(T_{\frac{\omega}{b}}F\right)(t)\overline{F}(t)=F\left(t-\frac{\omega}{b}\right)\overline{F(t)}$,

而 $F(t)=e^{i\pi\frac{a}{b}t^2}f(t)$ 与 $f(t)$ 有相同的支集，故当 $|t|>\frac{c}{2}$ 时,$F_{\frac{\omega}{b}}(t)=0$.

现在考虑 $|t|\le\frac{c}{2}$ 时，即 $-\frac{c}{2}\le t\le\frac{c}{2}$.

当 $\frac{\omega}{b}>c$ 时,$t-\frac{\omega}{b}\le\frac{c}{2}-\frac{\omega}{b}\le\frac{c}{2}-c=-\frac{c}{2}$.

当 $\frac{\omega}{b}<-c$ 时,$\frac{c}{2}=c-\frac{c}{2}<-\frac{c}{2}-\frac{\omega}{b}\le t-\frac{\omega}{b}$.

综上，当 $\left|\frac{\omega}{b}\right|>c$ 时，得 $\left|t-\frac{\omega}{b}\right|>\frac{c}{2}$,故当 $|t|\le\frac{c}{2}$ 时，且 $\left|\frac{\omega}{b}\right|>c$ 时，$F_{\frac{\omega}{b}}=0$.

因此当 $\left|\frac{\omega}{b}\right|>c,F_{\frac{\omega}{b}}=0$ a.e

已知 *b*,*c*>0,我们得

$$\mathrm{supp}\left(F_2\left(\left|\left(W_\phi f\right)\right|^2\right)(x,\omega)\right)\subseteq[-bc,bc]$$

因此对任意 $x\in\mathbb{R}$,有 $\left|W_\phi f(x,\cdot)\right|^2\in PW_{bc}^2$。

现在假设函数 $h\in L^4\left[-\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right]$,且满足对每个 $z\in\frac{1}{b}\mathbb{Z}\times\frac{1}{2bc}\mathbb{Z}$，

$$\left|W_\varphi f(z)\right|=\left|W_\varphi h(z)\right|.$$

通过 Shannon 的采样定理知，对每个 $x\in\frac{1}{b}\mathbb{Z}$，有

$$\left|W_\varphi f(x,\omega)\right|^2=\left|W_\varphi h(x,\omega)\right|^2.$$

对第二个参数进行傅里叶变换，并由式(1)得到对每个 $\omega\in R$ 和每个 $x\in\frac{1}{b}\mathbb{Z}$，

$$\langle F_\omega-H_\omega，T_x\varphi_\omega\rangle=0$$

都成立。对于给定的 $\omega$，$\phi_\omega(t)=ae^{-b^2(t-d)^2}$ 是一个高斯函数，这里 $a,b>0,d\in\mathbb{R}$ 是实数。显然，级数

$$\sum_{x\in\frac{1}{b}\mathbb{Z}}{}'\frac{1}{|\lambda|}=b\sum_{n\in\mathbb{Z}/\{0\}}|n|^{-1}$$

是发散的，从 Zalik 的定理可以得出平移系统 $\{T_x\varphi_\omega : x\in\frac{1}{b}\mathbb{Z}\}$在$L^2[-\frac{c}{2},\frac{c}{2}]$中是完备的。注意$F_\omega$和$H_\omega$的支集在$[-\frac{c}{2},\frac{c}{2}]$和 Holder 不等式得$F_\omega-H_\omega\in L^2[-\frac{c}{2},\frac{c}{2}]$。因此，$F_\omega=H_\omega$对应每个$\omega\in\mathbb{R}$，所以$f_\omega=h_\omega$。令$\omega=0$得

$$|f|^2=|h|^2 \tag{7}$$

当 $f=0$ 时 $h=0$。如果 $f\neq 0,\exists p\in R$ 且 $f(p)\neq 0$，则由$f_\omega(p)=h_\omega(p)$得到，当取$\omega=p-t$时，$f_{p-t}(p)=h_{p-t}(p)$，进而对每一个$t\in\mathbb{R}$，$f(t)\overline{f(p)}=h(t)\overline{h(p)}$。因此，存在一个$\tau\in\mathbb{C}$使得$f=\tau h$。方程（7）蕴含$\tau\in\mathbb{T}$。

## 参考文献

[1]M·F·厄顿.基于变换域分析的信道设计:202011579852[P][2024-12-24].

[2]郝建民. 奈奎斯特准则的发展——采样定理和奈奎斯特准则研究·下篇[J]. 导弹与航天运载技术，1997 (6): 42-47.

[3]冷建华.傅里叶变换[M].清华大学出版社,2004.

[4]陈芳.数字信号处理 DSP 芯片与快速傅里叶变换 FFT[J].集成电路应用，1995(3):3.DOI:CNKI:SUN:JCDL.0.1995-03-011.

[5]胡丽莹,肖蓬.快速傅里叶变换在频谱分析中的应用[J].福建师范大学学报：自然科学版，2011，27(4):4.DOI:CNKI:SUN:FJSZ.0.2011-04-006.

[6]许锐.博士论文-X 射线衍射成像方法学研究[J].2009.

[7]崔文达,杜少军.基于分数阶傅里叶变换的相位恢复[J].激光与光电子学进展，2013，50(9):7.DOI:CNKI:SUN:JGDJ.0.2013-09-013.

[8]张望平,吕晓旭,刘胜德,等.基于时域傅里叶变换的广义相移相位恢复方法[J].中国激光，2015(9):7.DOI:CNKI:SUN:JJZZ.0.2015-09-038.

[9]数学.带限向量函数的 Gabor 相位恢复与广义的 Paley-Wiener 空间中的 Gabor 相位恢复[D].2023.

[10]数学.Gabor 变换相位恢复的估计和 Balian-Low 定理相关研究[D]. 2023.

[11]向强.线性正则变换相关理论问题研究[D].电子科技大学[2025-04-01].DOI:CNKI:CDMD:1.1013.149630.

作者简介：詹景淇，2004 年 5 月 5 日，女，汉族，河南省信阳市，天津理工大学本科在读，学生，研究方向：线性正则变换。

曾伦君，2004 年 7 月 28 日，男，汉族，四川省什邡市，天津理工大学本科在读。

项目：大学生创新创业训练计划项目资助（202410060115）